I. Teoría de categorías.

1. Definimos **Rec.** Un objeto en **Rec.** es una terna $\langle A, a, \alpha\rangle$ donde A es un conjunto, $a \in A$ es un elemento y $\alpha : A \longrightarrow A$ es una función.
   Un morfismos $f : \langle A, a, \alpha\rangle \longrightarrow \langle B, b, \beta\rangle$ es una función tal que $f(a) = b$ y $f \circ \alpha = \beta \circ f$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dd, "f"'] & A \arrow[dd, "f"] \\ \{\star\} \arrow[ur, "\star\mapsto a"] \arrow[dr, "\star\mapsto b"'] & & \\ & B \arrow[r, "\beta"'] & B \end{tikzcd}$$

   (a) Verifica que **Rec** es una categoría.
   (b) Sea $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función sucesor $n \mapsto n + 1$. Observa que $\langle \mathbb{N}, 0, s\rangle$ es un objeto en **Rec**.
   (c) Demuestra que para cualquier objeto $\langle A, a, \alpha\rangle$ en **Rec**, existe un único morfismo $\langle \mathbb{N}, 0, s\rangle \longrightarrow \langle A, a, \alpha\rangle$.

2. Los objetos en la categoría rebanada $\mathcal{C} := \mathbf{Sets}/\{a, b\}$ son funciones $h : A \longrightarrow \{a, b\}$. Un morfismo $h' \longrightarrow h$ en $\mathcal{C}$ es una función $\theta : A' \longrightarrow A$ tal que el siguiente triángulo es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "h'"'] & & A \arrow[dl, "h"] \\ & \{a, b\} & \end{tikzcd}$$

   Por otro lado, en la categoría $\mathcal{D} := \mathbf{Sets} \times \mathbf{Sets}$ los objetos son pares de conjuntos (A, B) y los morfismos $(A', B') \longrightarrow (A, B)$ son pares de funciones $f' : A' \longrightarrow A$, $g : B' \longrightarrow B$.
   Define una función sobre los objetos:

$$F_{ab} : Obj(\mathcal{C}) \longrightarrow Obj(\mathcal{D})$$

$$F_{ab}(h) := (h^{-1}[a], h^{-1}[b])$$

   (a) Extiende F_{ab} a un funtor, describiendo una función apropiada $F_{ab} : Mor(\mathcal{C}) \longrightarrow Mor(\mathcal{D})$.
   (b) Demuestra que cada par de conjuntos (A, B) es isomorfo a algún objeto $F(h)$.
   (c) Dados objetos $h, h' \in \mathcal{C}$, demuestra que F_{ar} determina una biyección entre el conjunto de morfismos $h \longrightarrow h'$ en $\mathcal{C}$ y el conjunto de morfismos $F(h') \longrightarrow F(h)$ en $\mathcal{D}$.

(d) ¿F es un isomorfismo de categorías?.

3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria. Demuestra lo siguiente:

   (a) Si $\alpha : A \longrightarrow B$ es un split-mono y también es un epimorfismo, entonces es un isomorfismo.
   (b) Si $\alpha : A \longrightarrow B$ es un split-epi y también es un monomorfismo, entonces es un isomorfismo.
   (c) Si $\gamma : A \longrightarrow B$ es un split-mono, entonces γ es un monomorfismo. Análogamente si $\gamma : A \longrightarrow B$ es un split-epi, entonces γ es un epimorfismo.
   (d) Si $f : A \longrightarrow C$ es un isomorfismo, entonces f es un bimorfismo.

4. Sea

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

un diagrama de pullback tal que f es un monomorfismo. Demuestra que α también es un monomorfismo. Si además f es un isomorfismo, entonces α también lo es.

5. Considera el siguiente siguiente diagrama con cuadrados conmutativos.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "b", "(I)"'] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "c", "(II)"'] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "d"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

   (a) Si ambos cuadrados son diagramas pullback entonces también el cuadrado externo es un diagrama de pullback.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "cb"] \arrow[d, "a"'] & C \arrow[d, "d"] \\ X \arrow[r, "hg"'] & Z \end{tikzcd}$$

   (b) Si el cuadrado (II) y el cuadrado externo son diagramas de pullback, demuestra que (I) también es un digrama de pullback.

6. Demuestra que $f : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo si y sólo si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "id_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es un diagrama de pullback.

6. Demuestra que $f : A \longrightarrow B$ es un epimorfismo si y sólo si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "id_B"] \\ B \arrow[r, "id_B"'] & B \end{tikzcd}$$

es un diagrama de pushout.

II. Categorías Abelianas.

7. Demuestra que la categoría $\mathcal{A}b$ (grupos abelianos) es una categoría abeliana. Donde $\mathcal{A}b$ se define como sigue:
   - $Obj(\mathcal{A}b) := \{A \in \mathcal{A}b |$A es grupo abeliano$\}$.
   - $Mor(\mathcal{A}b) := \{f : A \longrightarrow B|$f es homomorfismo de grupos abelianos$\}$.

8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismos en $\mathcal{C}$. Sean $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X$ y $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y$ subobjetos de X y Y respectivamente. Entonces:
   (a) $f(X_1) \subseteq f(X_2)$;
   (b) $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$;
   (c) $X_1 \subseteq f^{-1}(f(X_1))$;
   (d) $f(X_1) = f(f^{-1}(f(X_1)))$.

9. Considere la siguiente suceción exacta

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

en una categoría abeliana.Demuestre que las siguientes afirmaciones son ciertas:
   (a) $Im(f) \cap Ker(g) = f(Ker(gf))$;
   (b) $Im(f) + Ker(g) = g^{-1}(Im(gf))$.

10. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana.Dado

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

un cuadrado pullback. Se puede completar al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Kerf' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "1_{Kerf'}"] & D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & C \arrow[d, "g"] \\
Kerf' \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

11. (*Segundo teorema de isomorfismo.*)Sean X_1 y X_2 subobjetos de X. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos y u'' un ismoformismo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \cap X_2 \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & X_2/(X_1 \cap X_2) \arrow[r] \arrow[d, "u''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_1 + X_2 \arrow[r] & (X_1 + X_2)/X_1 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Hint: Considere la siguiente proposición.

Proposición. Sean X_1, X_2 dos subobjetos de X. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \cap X_2 \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & X_2/(X_1 \cap X_2) \arrow[r] \arrow[d, "u''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X/X_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_1 + X_2 \arrow[r] & (X_1 + X_2)/X_1 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

III. Teoría de módulos.

12. Sean R un anillo con 1 e I un ideal bilateral de R. Demuestra que si M es un R módulo izquierdo, entonces:

    (a) IM es un $R-$submódulo de M.

    (b) M es un $R/I-$módulo izqueirdo si y soló si $IM = 0$.

13. Sea $M \in Mod(R)$. Co nsidera la correspondencia contravariante $Hom_R(M, -) : Mod(R) \to Ab$. Esto es, dado un morfismo $f : X \to Y$ en $Mod(R)$, se define el morfismo de grupos abelianos $Hom_R(M, f) : HomR(M, X) \to Hom_R(M, Y)$, donde $Hom_R(M, f)(h) := fh$. Pruebe que $Hom_R(M, ?) : Mod(R) \to Ab$ es un funtor covariante.

14. Sea $M \in Mod(R)$. Considere la correspondencia contravariante $Hom_R(?, M) : Mod(R) \to Ab$. Esto es, dado un morfismo $f : X \to Y$ en $Mod(R)$, se define el morfismo de grupos abelianos $Hom_R(f, M) : Hom_R(Y, M) \to Hom_R(X, M)$, donde $Hom_R(f, M)(h) := hf$. Pruebe que $Hom_R(?, M) : Mod(R) \to Ab$ es un funtor contravariante.

15. Sea M un R-módulo. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.
    (a) M es simple.
    (b) 0 es un submódulo maximal de M.
    (c) $M \neq 0$ y $M = Rm$ para todo $m \in M?\{0\}$.
    (d) $M \neq 0$ y para todo $f \in Hom_R(M, X)?\{0\}$ se tiene que $Ker(f) = 0$.
    (e) $M \neq 0$ y para todo $f \in Hom_R(X, M)?\{0\}$ se tiene que $Im(f) = M$.

16. Pruebe que M es finitamente generado si y sólo si existe un epimorfismo $f : R^n \to M$ en $Mod(R)$.

17. Demuestra que todo anillo no trivial admite módulos simples.

18. (a) Enuncia y demuestra la propiedad universal del coproducto directo en $Mod(R)$.

    (b) Enuncia y demuestra la propiedad universal del producto directo en $Mod(R)$.

    (c) Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$. Verifica que $\coprod_{\alpha\in\Gamma} M_\alpha$ es un submódulo de $\prod_{\alpha\in\Gamma} M_\alpha$.

    (d) Demuestra que $\prod_{\alpha\in\Gamma} M_\alpha = \coprod_{\alpha\in\Gamma} M_\alpha$ si y sólo si Γ es un conjunto finito.

19. Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta en Mod(R). Entonces toda filtración $F = \{F_i\}_{i=1}^{n}$ en B, induce una filtraci?on $f^{-1}(F)$ en A y otra $g(F)$ en C.

20. Sea $M \in Mod(R)$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.
    (a) M es noetheriano.
    (b) $\Lambda_R(M) \subseteq mod(R)$, donde $mod(R)$ denota a la subcagoría plean de $Mod(R)$ consistente de los módulos finitamente generados.
    (c) Para todo $\neq S \subseteq \Lambda_R(M)$ existe un elemento maximal en $(S, \leq)$.

21. Sea $M \in Mod(R)$. Pruebe que M es artiniano si y sólo si para todo $S \subseteq \Lambda_R(M)$ no vacío, existe un elemento minimal en $(S, \leq)$.

22. Sea $0 \to K \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta en $Mod(R)$. Pruebe que M es artiniano (noetheriano) si y sólo si K y N son artinianos (noetherianos).

23. Sea R un anillo y $M \in Mod(R)$. Entonces
    (a) $M \in f.l.(R)$ si y sólo si M es artiniano y noetheriano.
    (b) $f.l.(R)$ es la menor subcategoría de Serre en $Mod(R)$ que contiene a los $R-$módulos simples.

(c) Si M es semisimple, entonces: $M \in f.l.(R) \iff M$ es noetheriano $\iff M$ es artiniano.

24. (a) Da la definición de prerradical.

    (b) Demuestra que los siguientes son prerradicales:

    - $\alpha_M^M = Tr_M$ (la traza de M),
    - $\omega_0^M = Rej_M$ (el rechazo de M),
    - $Tr_{(U)}$, donde $\mathcal{U}$ es una clase de módulos.
    - $Rej_{(U)}$, donde $\mathcal{U}$ es una clase de módulos.
    - rad
    - soc.

    (c) Demuestra que $K \in Gen(U)$ si y sólo si $\alpha_U^U(K) = K$.

    (d)Demuestra que $K \in Cog(U)$ si y sólo si $\omega_0^U(K) = 0$.

    (e) Demuestra además que $rad(M/rad(M)) = 0$ para todo $M \in Mod(R)$; y que soc es un prerradical exacto izquierdo.

25. Enuncia el Teorema de Wedderburn-Artin.

26. (a) Sea M un módulo semisimple, con descomposición $M = \bigoplus_{\lambda\in\Gamma} T_\lambda$. Si $0 \to K \to M \to N \to 0$ es una sucesión exacta corta en $Mod(R)$, demuestra que la sucesión se escinde y que K y N son semisimples. (b) Sea $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es una familia de submódulos simples de M. Si T es un módulo simple de M tal que $T \cap (\sum_\Gamma T_\alpha) \neq 0$, entonces existe $\alpha \in \Gamma$ tal que $T \cong T_\alpha$.

27. Demuestra que para $M \in Mod(R)$, son equivalentes:

    - M es semisimple
    - $M \in Gen(R - simp)$.
    - M es la suma de algún conjunto de submódulos simples.
    - M es la suma de sus submódulos simples
    - Cada subódulo de M es un sumando directo.
    - Cada sucesion exacta corta $0 \to K \to M \to L \to 0$ en $Mod(R)$ se escinde.

28. (a) Demuestra que si $soc(M) = M$ si y sólo si $M \in Gen(R - simp)$.

    (b) En particular, si M es semisimple, entonces $soc(M) = M$. ?El recíproco es cierto? Demuestra o da un contraejemplo.

29. (a) Demuestra que $rad(M) = 0$ si y sólo si $M \in Cog(R - simp)$.

    (b) En particular, si M es semisimple, entonces $rad(M) = 0$. ¿El recíproco es cierto?Demuestra o da un contraejemplo.

30. Investiga y enuncia el teorema de Hopkins-Levitzki.